УДК 514.75

А. В. Кулешов

ВНУТРЕННЕЕ ОСНАЩЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНОГО СЕМЕЙСТВА ГИПЕРПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ С ОГИБАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ЦЕНТРОВ

В многомерном проективном пространстве рассматривается семейство гиперплоских элементов с огибающей поверхностью центров. Ставится задача построения инвариантного оснащения данного семейства внутренним образом. Эта задача решается в особом случае, характеризующемся обращением в нуль некоторого тензора. Решение основано на методе подвижного репера и исчислении внешних дифференциальных форм Э. Картана.

In multidimensional projective space a family of hyperplane elements with envelope surface of centers is considered. The problem of construction of invariant clothing intrinsically attached to such a family intrinsically is set. This problem is solved in a special case characterized by vanishing of a certain tensor. The solution is based on the method of moving frames and calculation of exterior differential forms of E. Cartan.

Ключевые слова: проективное пространство, гиперплоский элемент, оснащение, подвижной репер, метод внешних форм.

Key words: projective space, hyperplane element, clothing, moving frame, exterior forms method.

Введение

Одна из основных задач дифференциальной геометрии многообразий, погруженных в проективное пространство, — построение внутренних оснащений. Эта задача решена лишь в ряде конкретных случаев. Так, *Г. Ф. Лаптев* в работе [3] внутренним образом построил оснащение (называемое нормализацией) невырожденной гиперповерхности в проективном пространстве. Аналогичный результат для гиперполос получил *А. В. Столяров* [5], показав, что внутренняя нормализация регулярной гиперполосы порождается ее 3-й дифференциальной окрестностью. Оба многообразия являются примерами семейств гиперплоских элементов с огибающей поверхностью центров. Поэтому приобретает актуальность задача распространения указанных выше результатов на случай произвольного семейства данного вида. Ее удалось решить в особом случае, характеризующемся обращением в нуль некоторого тензора. Это решение и представлено в настоящей работе. Оно основано на методе подвижного репера *Э. Картана*, опирающемся на исчисление внешних дифференциальных форм (см., напр., [6]). В рамках этого метода производится аналитическая канонизация репера, основанная на систематическом применении леммы *Н. М. Остиану* [4].

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2013. Вып. 10. С. 64 – 68.

1. Уравнения семейства B_{p+q}

Пусть P_N — N-мерное проективное пространство ($N \geqslant 4$). *Гиперплоский элемент* пространства P_N [1] — пара $L^*_{N-1} = (L_{N-1}, C)$, где L_{N-1} — гиперплоскость; C — точка, лежащая в L_{N-1} (это *центр* элемента L^*_{N-1}).

Семейством гиперплоских элементов с огибающей поверхностью центров B_{p+q} [2] будем называть гладкое семейство гиперплоских элементов, удовлетворяющее следующим двум условиям.

1. Центр C элемента L^*_{N-1} описывает p-мерную поверхность S_p ($p < N-2$), и касательная плоскость $T_p(C)$ к поверхности в C лежит в плоскости L_{n-1} каждого элемента L^*_{n-1}, имеющего C своим центром.

2. Каждая точка C поверхности S_p является центром гладкой q-параметрической связки $B_q(C)$ элементов семейства, где $1 \leqslant q < N-p-1$.

Замечание. Поверхность S_p — p-мерная огибающая плоскостей B_{p+q}.

С каждым элементом $L^*_{N-1} \in B_{p+q}$ инвариантно связана его характеристическая r-плоскость F_r ($r = N - p - q - 1$), лежащая в нем вместе со своей первой дифференциальной окрестностью. Семейство *регулярно*, если F_r пересекается с касательной плоскостью $T_p(C)$ по центру этого элемента. Далее будем рассматривать лишь регулярные семейства.

Следуя [2], дадим аналитическое описание семейства B_{p+q}. Отнесем P_N к подвижному реперу $\{A, A_1, \ldots, A_N\}$ с деривационными формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I,\ \ dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A,\ \ I, J, \ldots = \overline{1, N},$$

где θ — множитель пропорциональности, а формы ω^I, ω_J^I, ω_I проективной группы $GP(N)$ удовлетворяют уравнениям *Э. Картана* [7, с. 121]

$$D\omega^I = \omega^K \wedge \omega_K^I,\ D\omega_I = \omega_I^K \wedge \omega_K,\ D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \omega^K \wedge (-\delta_J^I \omega_K - \delta_K^I \omega_J).$$

Разобьем индекс I на четыре серии: $I = \{i, u, y, N\}$, причем

$$i, j, \ldots = \overline{1, p};\ \ u, v, \ldots = \overline{p+1, p+q};\ \ y, z, \ldots = \overline{p+q+1, N-1}.$$

Над B_{p+q} как над базой возникает расслоение проективных реперов, адаптированных семейству так, что каждый репер $\{A, A_i, A_u, A_y, A_N\}$, принадлежащий слою над $L^*_{N-1} = (L_{N-1}, C)$, удовлетворяет $A = C$, $A_i \in T_p(C)$, $A_u \in L_{N-1}$, $A_y \in F_r(L^*_{N-1})$. Уравнения B_{p+q} в адаптированном репере

$$\omega^u = 0,\ \omega^y = 0,\ \omega^N = 0,\ \omega_y^N = 0,\ \omega_i^u = \Lambda_{ij}^u \theta^j,\ \omega_i^y = \Lambda_{ij}^y \theta^j,\ \omega_i^N = \Lambda_{ij}^N \theta^j,$$

$$\omega_y^u = \Lambda_{yi}^u \theta^i + \Lambda_{yN}^{uv} \theta_v^N,\ \omega_y^i = \Lambda_{yj}^i \theta^j + \Lambda_{yN}^{iu} \theta_u^N,$$

где $\theta^i = \omega^i$, $\theta_u^N = \omega_u^N$ являются базисными формами семейства, определяющими смещение текущего элемента L^*_{N-1}, а совокупность функций $\Lambda_1 = \{\Lambda_{ij}^u, \Lambda_{ij}^y, \Lambda_{ij}^N, \Lambda_{yi}^u, \Lambda_{yN}^{uv}, \Lambda_{yj}^i, \Lambda_{yN}^{iu}\}$ образует фундаментальный объект 1-го порядка многообразия B_{p+q}, причем $\Lambda_{ij}^u = \Lambda_{ji}^u$, $\Lambda_{ij}^y = \Lambda_{ji}^y$, $\Lambda_{ij}^N = \Lambda_{ji}^N$.

Уравнения на компоненты этого объекта запишем в виде сравнений по модулю базисных форм:

$$\Delta\Lambda_{ij}^{u}+\Lambda_{ij}^{N}\omega_{N}^{u}\equiv 0,\ \Delta\Lambda_{ij}^{y}+\Lambda_{ij}^{u}\omega_{u}^{y}+\Lambda_{ij}^{N}\omega_{N}^{y}\equiv 0,\ \Delta\Lambda_{ij}^{N}\equiv 0,\ \Delta\Lambda_{yi}^{u}-\Lambda_{yN}^{uv}\Theta_{vi}^{N}\equiv 0,\ \Delta\Lambda_{yN}^{uv}\equiv 0,\quad (1.1)$$

$$\Delta\Lambda_{yj}^{i}+\Lambda_{yj}^{u}\omega_{u}^{i}-\Lambda_{yN}^{iu}\Theta_{uj}^{N}-\delta_{j}^{i}\omega_{y}\equiv 0,\ \Delta\Lambda_{yN}^{iu}+\Lambda_{yN}^{vu}\omega_{v}^{i}\equiv 0,\qquad (1.2)$$

где, например, $\Delta\Lambda_{ij}^{N}=d\Lambda_{ij}^{N}+\Lambda_{ij}^{N}\omega_{N}^{N}-\Lambda_{kj}^{N}\omega_{i}^{k}-\Lambda_{ik}^{N}\omega_{j}^{k}$, а формы Θ_{ui}^{N} имеют вид $\Theta_{ui}^{N}=-\Lambda_{ji}^{N}\omega_{u}^{j}$. Из этих сравнений, в частности, видно, что подобъекты $\{\Lambda_{ij}^{N}\}$ и $\{\Lambda_{yN}^{uv}\}$ объекта Λ_1 являются тензорами в смысле [3]. В силу регулярности семейства B_{p+q} тензор Λ_{ij}^{N} является невырожденным, то есть

$$\Lambda=\det\left\|\Lambda_{ij}^{N}\right\|\neq 0.\qquad (1.3)$$

При этом можно ввести в рассмотрение обращенный тензор V_{N}^{ij}, компоненты которого образуют матрицу, обратную к $\left\|\Lambda_{ij}^{N}\right\|$: $V_{N}^{ik}\Lambda_{kj}^{N}=\delta_{j}^{i}$.

Уравнения на тензоры Λ_{ij}^{N} и V_{N}^{ij} имеют соответственно вид

$$\Delta\Lambda_{ij}^{N}=\Lambda_{ijk}^{N}\theta^{k}-\Lambda_{ij}^{u}\theta_{u}^{N},\ \Delta V_{N}^{ij}=-V_{N}^{ik}V_{N}^{jm}\Lambda_{kml}^{N}\theta^{l}+V_{N}^{ik}V_{N}^{jm}\Lambda_{km}^{u}\theta_{u}^{N}.\qquad (1.4)$$

Продолжая уравнения (1.4) на Λ_{ij}^{N}, получим сравнения на Λ_{ijk}^{N}:

$$\Delta\Lambda_{ijk}^{N}-3\Lambda_{(ij}^{N}\Lambda_{k)s}^{N}\omega_{N}^{s}-3\Lambda_{(ij}^{N}\omega_{k)}-3\Lambda_{(ij}^{u}\Lambda_{k)s}^{N}\omega_{u}^{s}\equiv 0.\qquad (1.5)$$

2. Специальное семейство $\overline{B}_{p+q}$

Рассмотрим объекты $\Lambda_{N}^{u}=\dfrac{1}{p}\Lambda_{jk}^{u}V_{N}^{jk}$, $\Lambda_{N}^{y}=\dfrac{1}{p}\Lambda_{jk}^{y}V_{N}^{jk}$, $\Lambda_{k}=\dfrac{1}{p+2}\Lambda_{ijk}^{N}V_{N}^{ij}$, $D_{ijk}^{N}=\Lambda_{ijk}^{N}-3\Lambda_{(ij}^{N}\Lambda_{k)}$, $D_{k}=D_{ijk}^{N}V_{N}^{ij}$, $D_{N}=V_{N}^{ij}D_{i}D_{j}$.

Сравнения на них вытекают из (1.4), (1.5) и имеют вид

$$\Delta\Lambda_{N}^{u}+\omega_{N}^{u}\equiv 0,\ \Delta\Lambda_{N}^{y}+\Lambda_{N}^{u}\omega_{u}^{y}+\omega_{N}^{y}\equiv 0,\qquad (2.1)$$

$$\Delta\Lambda_{k}\equiv(\Lambda_{ks}^{N}\omega_{N}^{s}-\omega_{k})+\frac{1}{p+2}(p\Lambda_{N}^{u}\Lambda_{ks}^{N}+2\Lambda_{ks}^{u})\omega_{u}^{s},\qquad (2.2)$$

$$\Delta D_{ijk}^{N}\equiv 3\Lambda_{(ij}^{u}\Lambda_{k)s}^{N}\omega_{u}^{s}-\frac{3}{p+2}\Lambda_{(ij}^{N}(p\Lambda_{k)s}^{N}\Lambda_{N}^{u}+2\Lambda_{k)s}^{u})\omega_{u}^{s},\ \Delta D_{k}\equiv 0,\ dD_{N}-D_{N}\omega_{N}^{N}\equiv 0.\quad (2.3)$$

Итак, D_N — относительный инвариант. Из (2.3): $d\ln D_{N}-\omega_{N}^{N}=B_{i}\theta^{i}+B_{N}^{u}\theta_{u}^{N}$. Сравнения на величины B_i, B_N^u, стоящие в правой части, имеют вид

$$\Delta B_{i}-\Lambda_{ij}^{N}(\omega_{N}^{j}+B_{N}^{u}\omega_{u}^{j})\equiv 0,\qquad (2.4)$$

$$\Delta B_{N}^{u}-\omega_{N}^{u}\equiv 0.\qquad (2.5)$$

Из (2.1) и (2.5) следует, что $W_{N}^{u}=\Lambda_{N}^{u}+B_{N}^{u}$ — тензор. Далее ограничимся рассмотрением таких регулярных B_{p+q}, у которых $W_{N}^{u}=0$. Обозначим их $\overline{B}_{p+q}$ и назовем *специальными семействами*. Для них (2.4):

$$\Delta B_{i}-\Lambda_{ij}^{N}(\omega_{N}^{j}-\Lambda_{N}^{u}\omega_{u}^{j})\equiv 0.\qquad (2.6)$$

3. Частичная канонизация репера семейства B_{p+q}

Этап 1. Пусть $\Lambda^u_N = \Lambda^y_N = 0.$ Тогда по (2.1) столько же структурных форм стали главными (то есть сравнимыми с нулем по модулю базисных форм):

$$\omega^u_N \equiv 0, \quad \omega^y_N \equiv 0 . \tag{3.1}$$

В соответствии с леммой Остиану имеем частичную канонизацию репера. Из (3.1) следует, что ω^u_N, ω^y_N можно разложить по базисным формам:

$$\omega^u_N = \Lambda^u_{Ni}\theta^i + \Lambda^{uv}_{NN}\theta^N_v \, , \; \omega^y_N = \Lambda^y_{Ni}\theta^i + \Lambda^{yv}_{NN}\theta^N_v \, . \tag{3.2}$$

Дифференцируя внешне (3.2) с последующим разрешением по лемме Картана, получим сравнения на коэффициенты при базисных формах:

$$\Delta\Lambda^u_{Ni} + \Lambda^u_{ji}\omega^j_N \equiv 0, \; \Delta\Lambda^{uv}_{NN} \equiv 0, \; \Delta\Lambda^y_{Ni} - \Lambda^y_{ji}\omega^j_N + \Lambda^u_{Ni}\omega^y_u \equiv 0, \; \Delta\Lambda^{yu}_{NN} + \Lambda^{vu}_{NN}\omega^y_v \equiv 0. \tag{3.3}$$

Следовательно, Λ^{uv}_{NN} — тензор. Обозначим $\widetilde{\Lambda}$ определитель $\left\|\Lambda^{uv}_{NN}\right\|$. Сравнение на $\widetilde{\Lambda}$: $d\widetilde{\Lambda} \equiv 2\widetilde{\Lambda}(q\omega^N_N - \omega^u_u)$. Итак, $\widetilde{\Lambda}$ — относительный инвариант. Далее ограничимся рассмотрением случая, когда он отличен от нуля:

$$\widetilde{\Lambda} = \det\left\|\Lambda^{uv}_{NN}\right\| \neq 0 \, . \tag{3.4}$$

Этап 2. Полагая $\Lambda^{yv}_{NN} = 0$, из (3.3) $\Lambda^{vu}_{NN}\omega^y_v \equiv 0$, откуда в силу (3.4) $\omega^y_u \equiv 0$.

Этап 3. После 1-го этапа канонизации сравнения (2.6) упрощаются:

$$\Delta B_i - \Lambda^N_{ij}\omega^j_N \equiv 0. \tag{3.5}$$

Пусть теперь $B_i = 0$. Тогда (3.5) с учетом (1.3) приводится к виду

$$\omega^i_N \equiv 0, \tag{3.6}$$

что позволяет разложить формы ω^i_N по базисным: $\omega^i_N = \Lambda^i_{Nj}\theta^j + \Lambda^{iu}_{NN}\theta^N_u$.

Осуществляя продолжение, получим

$$\Delta\Lambda^i_{Nj} + \Lambda^u_{Nj}\omega^i_u - \Lambda^{iu}_{NN}\Lambda^N_{jk}\omega^k_u - \delta^i_j\omega_N \equiv 0 \, , \tag{3.7}$$

$$\Delta\Lambda^{iu}_{NN} + \Lambda^{vu}_{NN}\omega^i_v \equiv 0 \, . \tag{3.8}$$

Этап 4. Положим $\Lambda^{iu}_{NN} = 0$. Тогда из (3.8) в силу (3.4) получим

$$\omega^i_u \equiv 0 \, . \tag{3.9}$$

Запишем разложения форм ω^i_u по базисным:

$$\omega^i_u = \Lambda^i_{uj}\theta^j + \Lambda^{iv}_{uN}\theta^N_v \, . \tag{3.10}$$

Продолжая (3.10), получим:

$$\Delta\Lambda^i_{uj} - \delta^i_j\omega_u \equiv 0 \, , \; \Delta\Lambda^{iv}_{uN} \equiv 0 \, . \tag{3.11}$$

Этап 5. С учетом (3.9) сравнения (1.2) и (3.7) сильно упрощаются:

$$\Delta\Lambda^i_{yj} - \delta^i_j\omega_y \equiv 0 \, , \; \Delta\Lambda^i_{Nj} - \delta^i_j\omega_N \equiv 0 \, . \tag{3.12}$$

Тогда $a_u = \Lambda^i_{ui}$, $a_y = \Lambda^i_{yi}$, $a_N = \Lambda^i_{Ni}$ — квазитензоры [3], так как сравнения на них, получаемые из (3.11) и (3.12) свертыванием по индексам *i* и *j*:

$$\Delta a_u - p\omega_u \equiv 0 \, , \; \Delta a_y - p\omega_y \equiv 0 \, , \; \Delta a_N - p\omega_N \equiv 0 \, . \tag{3.13}$$

С учетом (3.6) и (3.9) сравнения (2.2) принимают вид

$$\Delta\Lambda_i + \omega_i \equiv 0\,. \qquad (3.14)$$

Пусть $a_u = a_y = a_N = \Lambda_i = 0,$ тогда из (3.13—3.14) получим $\omega_u \equiv \omega_y \equiv \omega_N \equiv \omega_i \equiv 0.$

В соответствии с леммой Остиану произведена частичная канонизация репера. В итоге все структурные формы, кроме ω_j^i, ω_v^u, ω_z^y, ω_N^N, стали главными. Это означает, что линейные оболочки следующих совокупностей вершин репера $N_{p-1} = [A_i], N_{q-1} = [A_u], N_{r-1} = [A_y]$ стали инвариантными плоскостями и, кроме того, зафиксирована вершина A_N.

При этом $C \oplus N_{p-1} \oplus N_{q-1} \oplus N_{r-1} \oplus A_N = P_N$. Таким образом, доказана

Теорема. *К семейству $\overline{B}_{p+q}$ внутренним образом присоединяется оснащение, состоящее из полей плоскостей $N_{p-1}, N_{q-1}, N_{r-1}$ и вершин A_N, дополняющих центр С до всего пространства P_N.*

Замечание. Этапы 1 и 2 канонизации репера можно осуществить и в общем случае регулярного семейства B_{p+q}.

Итак, построение внутреннего оснащения для $\overline{B}_{p+q}$ позволяет строить на нем внутренние связности. В этом отчасти заключается роль оснащений, присоединенных внутренним образом. Остаются вопросы: 1) геометрическая характеристика произведенной канонизации; 2) полная канонизация репера $\overline{B}_{p+q}$; 3) исследование произвола существования специального семейства; 4) внутренние оснащения B_{p+q} общего вида.

Список литературы

1. *Бочилло Г. П.* К дифференциальной геометрии *m*-распределений на многообразии всех гиперплоских элементов *n*-мерного проективного пространства // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1983. Вып. 14. С. 18—23.

2. *Кулешов А. В.* Об одном проективном инварианте семейства гиперплоских элементов с огибающей поверхностью центров // Там же. Вып. 44. Калининград, 2013 (в печати).

3. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. мат. о-ва. М., 1953. Т. 2. С. 275—382.

4. *Остиану Н. М.* О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RPR). 1962. Т. 7, №2. С. 231—240.

5. *Столяров А. В.* О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы // Изв. вузов. Мат. 1975. №10. С. 97—99.

6. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.; Л., 1948.

7. *Cartan E.* Lecons sur la theorie des espaces a connexion projective. Paris, 1937.

Об авторе

Артур Владимирович Кулешов — ассист., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: arturkuleshov@yandex.ru

About the author

Artur Kuleshov — Ass., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: arturkuleshov@yandex.ru